



# انتقال حرارت ۱

مدرس: نفیسه بینش

# فصل دوم:

## معادلات اساسی هدایت

۱-۲: معادلات کلی هدایت در مختصات کارتیزین

۲-۲: معادلات کلی هدایت در مختصات استوانه ای

۳-۲: معادلات کلی هدایت در مختصات کروی

- طبق قانون فوریه، شدت انتقال حرارت در جسم به جنس آن، اندازه سطح و شیب دما در داخل جسم بستگی دارد:

$$q_x = -KA \frac{dT}{dx} \quad \text{قانون فوریه}$$

- معادله توزیع دما: رابطه ای برای  $T$  بر حسب  $x$
- شیب دما در داخل جسم،  $dT/dx$ ، از مشتق گیری معادله توزیع دما بدست می آید (مشتق  $T$  بر حسب  $x$ ).
- در نتیجه برای محاسبه شدت انتقال حرارت در جسم، اولین گام یافتن معادله توزیع دما در آن جسم است.

- جسم مورد بررسی ممکن است یک سیستم یک، دو یا سه بعدی باشد و بسته به شکل هندسی آن معادلات مربوطه در مختصات کارتزین، استوانه ای یا کروی نوشته شود:

$$T(x,y,z)$$

$$T(r,\theta,z)$$

$$T(r,\theta,\phi)$$

- برای بدست آوردن توزیع دما، باید موازنه انرژی را برای یک جزء (المان) از جسم نوشت که در نهایت به یک معادله دیفرانسیل می رسیم.

- در این فصل و فصل های بعدی، نحوه بدست آوردن معادله انرژی را برای چند سیستم بیان کرده و معادله دیفرانسیل و در نهایت معادله توزیع دما را بدست می آوریم.

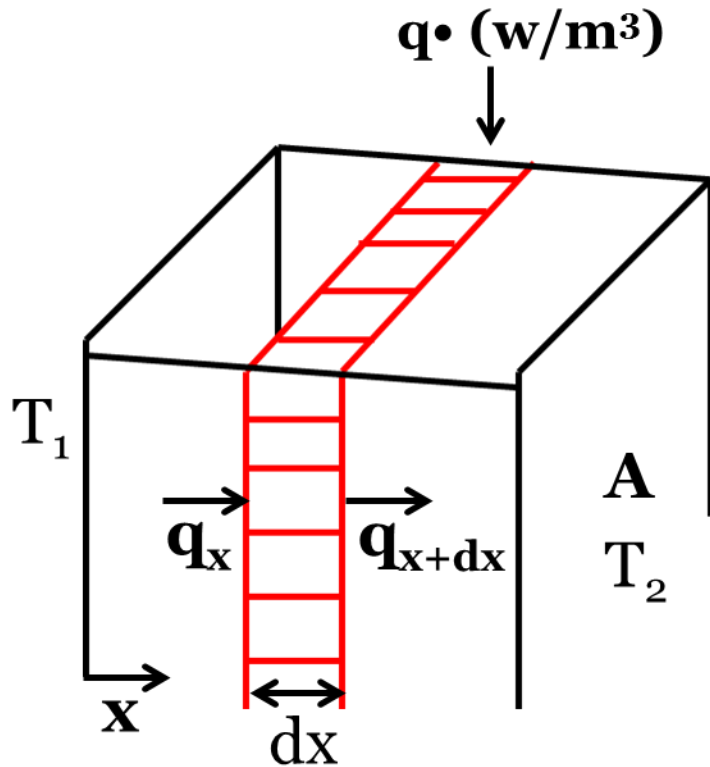
موازنه انرژی ← معادله کلی هدایت (این فصل) ← معادله توزیع دما ← محاسبه  $q$

## ۱-۲: معادله کلی هدایت در مختصات کارتیزین (تیغه)

• شکل کلی موازنه انرژی به صورت زیر می باشد:

= تغییرات انرژی داخلی (تغییر دما با زمان)

حرارت مصرفی (چاه حرارتی) - حرارت تولیدی (چشمه حرارتی) + حرارت خروجی - حرارت ورودی



یا:

$$q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}$$

• **ترم  $q_t$  :**

- تغییرات انرژی داخلی از ابتدای فرآیند انتقال حرارت تا انتها:

$$q_t = mc_p \Delta T$$

- تغییرات انرژی داخلی در هر لحظه:

$$q_t = mc_p \frac{dT}{dt}$$

$$m = \rho V \rightarrow \text{المان} : dm = \rho(dV) = \rho A(dx)$$

$$q_t = \rho c_p A(dx) \frac{dT}{dt}$$

• **ترم  $q_{in}$  :**

$$q_{in} = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_x$$

$$q_{in} = -KA \frac{dT}{dx}$$

• ترم  $Q_{out}$  :

$$Q_{out} = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{x+dx} - y|_x}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{dy}{dx} \Big|_{x+dx} - \frac{dy}{dx} \Big|_x}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = \frac{\frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - \frac{dT}{dx} \Big|_x}{dx} \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - \frac{dT}{dx} \Big|_x}{dx}$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx$$

$$Q_{out} = -KA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right)$$

• **ترم  $Q_{gen}$  :**

$$Q_{gen} = q \cdot dv$$

$$Q_{gen} = q \cdot A dx$$

$$q_t = \rho c_p A (dx) \frac{dT}{dt}$$

$$q_{in} = -KA \frac{dT}{dx}$$

$$q_{out} = -KA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} \right) dx$$

$$q_{gen} = q \cdot A dx$$

$$q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}$$

$$\rho c_p A(dx) \frac{dT}{dt} = -KA \frac{dT}{dx} + KA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) + q \cdot A dx$$

$$\rho c_p A(dx) \frac{dT}{dt} = \cancel{-KA \frac{dT}{dx}} + \cancel{KA \frac{dT}{dx}} + KA \frac{d^2T}{dx^2} dx + q \cdot A dx$$

$$\cancel{\rho c_p A(dx) \frac{dT}{dt}} = \cancel{KA \frac{d^2T}{dx^2} dx} + \cancel{q \cdot A dx}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = K \frac{d^2T}{dx^2} + q \cdot$$

طرفین را تقسیم بر  $K$  می کنیم:

$$\frac{\rho c_p}{K} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q \cdot}{K}$$

با تعریف ضریب نفوذ حرارتی به صورت  $\alpha = K / \rho c_p$  داریم:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q \cdot}{K}$$

- معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم کارتزین :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q \bullet}{K}$$

- معادله کلی هدایت سه بعدی در سیستم کارتزین :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{q \bullet}{K}$$

- حالت پایدار: تغییرات با زمان وجود ندارد؛ در نتیجه ترم  $dT/dt$

حذف می شود

- معادله هدایت سه بعدی پایدار با چشمه حرارتی:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{q \bullet}{K} = 0$$

- معادله هدایت سه بعدی ناپایدار بدون چشمه حرارتی:

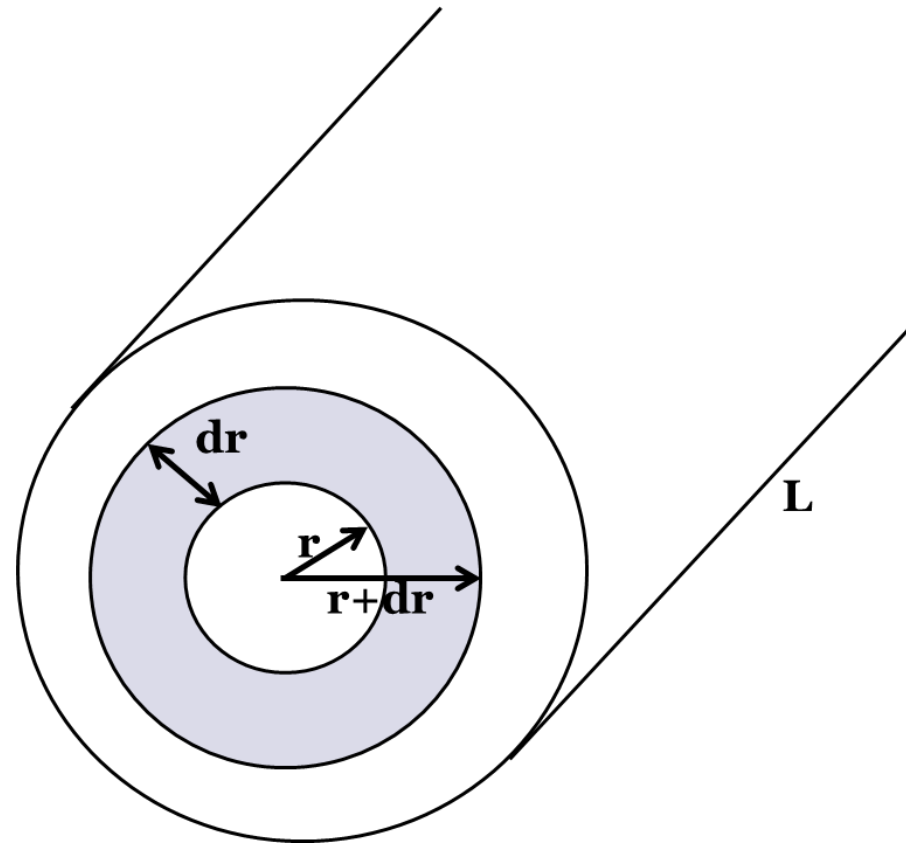
$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}$$

- معادله هدایت سه بعدی پایدار بدون چشمه حرارتی

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

## ۲-۲: معادله کلی هدایت در سیستم استوانه ای

- فرض کنیم انتقال حرارت فقط یک بعدی باشد (در جهت شعاع)



$$q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}$$

## • ترم $q_t$ :

- تغییرات انرژی داخلی از ابتدای فرآیند انتقال حرارت تا انتها:

$$q_t = mc_p \Delta T$$

$$q_t = mc_p \frac{dT}{dt} = \rho \cdot dV \cdot c_p \frac{dT}{dt}$$

$$V = \pi r^2 L \rightarrow dV = 2\pi r L dr$$

$$q_t = 2\pi r L \rho c_p dr \frac{dT}{dt}$$

- تغییرات انرژی داخلی در هر لحظه:

## • ترم $q_{in}$ و $q_{out}$ و $q_{gen}$ :

$$q_{in} = -KA \frac{dT}{dr} \Big|_r$$

$$q_{out} = -KA \frac{dT}{dr} \Big|_{r+\Delta r} \quad (A=2\pi rL)$$

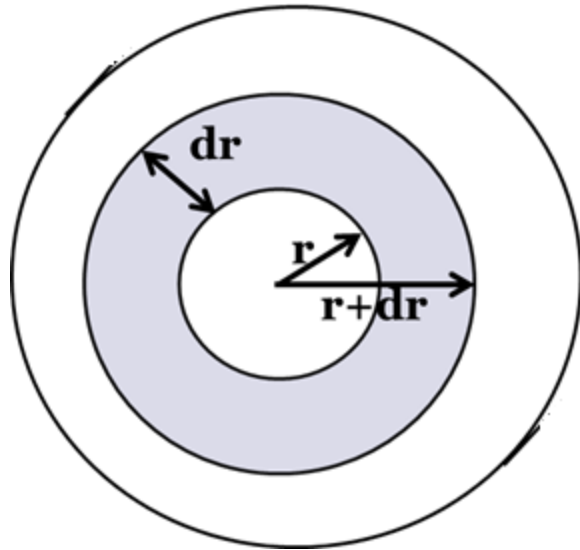
$$q_{gen} = q \cdot dv = q \cdot (2\pi rL dr)$$

• معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم استوانه ای:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q \cdot}{K}$$

## ۲-۳: معادله کلی هدایت در سیستم کروی

- فرض کنیم انتقال حرارت فقط یک بعدی باشد (در جهت شعاع)



$$q_t = q_{in} - q_{out} + q_{gen}$$

• **ترم  $Q_t$  :**

- تغییرات انرژی داخلی از ابتدای فرآیند انتقال حرارت تا انتها:

- تغییرات انرژی داخلی در هر لحظه:

$$q_t = mc_p \Delta T$$

$$q_t = mc_p \frac{dT}{dt} = \rho \cdot dV \cdot c_p \frac{dT}{dt}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

$$q_t = 4\pi r^2 \rho c_p dr \frac{dT}{dt}$$

• **ترم  $Q_{in}$  و  $Q_{out}$  و  $Q_{gen}$  :**

$$q_{in} = -KA \frac{dT}{dr} \Big|_r$$

$$q_{out} = -KA \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} \quad (A = 4\pi r^2)$$

$$q_{gen} = q \cdot dv = q \cdot (4\pi r^2 dr)$$

• معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم کروی:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q \bullet}{K}$$

- معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم کارتزین :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q \bullet}{K}$$

- معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم استوانه ای:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q \bullet}{K}$$

- معادله کلی هدایت یک بعدی در سیستم کروی:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q \bullet}{K}$$

- توجه: سه معادله فوق باید حفظ شود.